小笠原 研究室

研究内容 さまざまな現象・設計・計画を数理的にモデル化するとしばしば**非線形**の問題になります．非線形性は問題の取り扱いを困難にしますが，問題を特徴付ける要因でもあります．そこでコンピュータによる数値計算によって, 近似的に解くという手法が取られます．モデルの典型例は意思決定のための**最適化問題**です．現象の理解や究明のために使われるモデルもあります．経済や交通流の均衡問題，浸透するダムの乾湿境界を決定する自由境界値問題などです．これらは**相補性問題**, **変分不等式問題**とよばれる問題に定式化されます．こうした問題の数値解を効率的に計算するためには，その構造やアルゴリズムの研究が重要です．

1 非線形(ノンリニア)とは?

そもそも‘線形(リニア)’関数とは何でしょうか? それは皆さんもよく知っている 1 次式のことです．幾何学的には, 平面上の直線, 空間内の平面を指します．グラフが真っ直ぐ, あるいは平らな関数—変化量が比例関係にある関数—のことです．これに対して, 線形でないものをひとくくりにして **“非” 線形**とよんでいるのですが, 一口に非線形といっても, その様相は多種多様です．世の中には, 急激に増えたり, その反対に, 頭打ちになったりといったような, 非線形な関係で記述される現象がごく自然に現れます．

2 最適化問題とは?

m 本の不等式で表される制約条件

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq 0, \qquad i = 1, \ldots, m$$

と, l 本の等式で表される制約条件

$$h_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad j = 1, \ldots, l$$

を同時に満たすような $(x_1, \ldots, x_n)$ の中で, 関数値 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が最小になるベクトル $x = (x_1, \ldots, x_n)$ を見つけよ, というのが**最適化問題**です．関数 f, g_i, h_j は, どれも一般には非線形の関数です．制約条件のない, たった 1 つの関数 f を最小化するだけでも, 一筋縄ではいきません．図 1 は, ある関数の等高線を描いたものですが, 随分と曲がっています．あなたはこの歪んだ‘顔’の‘右目’と’左目’のどちらが最適解だと思いますか?

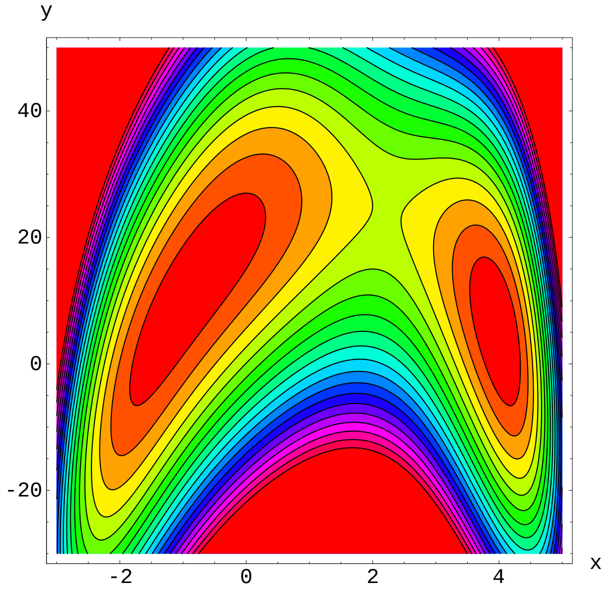

図 1: Freudenstein–Roth 関数の等高線

3 相補性問題, 変分不等式問題へ

最適化問題を一般化すると ……

相補性問題

次を満たすような $(x_1, \ldots, x_n)$ を求めよ.

$$x_i \geq 0, \quad F_i(x_1, \ldots, x_n) \geq 0,$$
$$x_i F_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

⇓ さらに一般化 ……適用範囲が広がる

変分不等式問題

次を満たすような $x \in S$ を求めよ.

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \qquad \forall y \in S$$

ここで $S \subset \mathbb{R}^n$ は閉凸集合, $\langle x, y \rangle$ は x と y の内積を表す.

Q. なぜ一般化して考えるのですか?
— **A**. 議論に統一的視点を与え, それによって物事の本質が見えてくるからです