勝率0.567は何勝何敗？

—近似値から正確な情報を効率よく得る方法—

関川研究室

問題

勝率0.567は何勝何敗？ただし，引き分けはないとする．

簡単？

- $0.567 = \dfrac{567}{1000}$ だから，567勝433敗．
- (567×2)勝(433×2)敗，(567×3)勝(433×3)敗，$\cdots$ も答．

ほかにも答がある？

m勝n敗が答とする．

$\dfrac{m}{m+n}$ の小数第4位を四捨五入して0.567 になってもよい．

$$0.5665 \leq \frac{m}{m+n} < 0.5675 \qquad (\spadesuit)$$

解法1（すべてのmを調べる）

$(\spadesuit)$は以下と同値（$0 < m+n$に注意）．

$$\frac{m}{0.5675} < m+n \leq \frac{m}{0.5665} \qquad (\heartsuit)$$

$m = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$(\heartsuit)$を満たす自然数$m+n$が存在するか否かを確認．

表1: 勝率0.567に対する計算過程

m	$\dfrac{m}{0.5675}$	$\dfrac{m}{0.5665}$	$(\heartsuit)$を満たす自然数$m+n$
1	$1.762\cdots$	$1.765\cdots$	なし
2	$3.524\cdots$	$3.530\cdots$	なし
3	$5.286\cdots$	$5.295\cdots$	なし
4	$7.048\cdots$	$7.060\cdots$	なし
5	$8.810\cdots$	$8.826\cdots$	なし
6	$10.572\cdots$	$10.591\cdots$	なし
7	$12.334\cdots$	$12.356\cdots$	なし
8	$14.096\cdots$	$14.121\cdots$	なし
9	$15.859\cdots$	$15.887\cdots$	なし
10	$17.621\cdots$	$17.652\cdots$	なし
11	$19.383\cdots$	$19.417\cdots$	なし
12	$21.145\cdots$	$21.182\cdots$	なし
13	$22.907\cdots$	$22.947\cdots$	なし
14	$24.669\cdots$	$24.713\cdots$	なし
15	$26.431\cdots$	$26.478\cdots$	なし
16	$28.193\cdots$	$28.243\cdots$	なし
17	$29.955\cdots$	$30.008\cdots$	30

$\Longrightarrow$ 勝数が最小の答は17勝13敗 $\left(\dfrac{17}{30} = 0.5666\cdots\right)$.

計算の手間

一つのmに対して必要な計算の回数を数える．

- 除算2回.
- $(\heartsuit)$を満たす自然数が存在するか否かの確認1回.

$\Longrightarrow$ M勝N敗が答なら除算と確認の合計は$3M$回.

【注意】勝率が5割超のときは「敗率」から計算する方が早い.

もっと効率のよい方法はないか？

分数のある性質

分数の対 $\dfrac{a_1}{b_1}$ と $\dfrac{a_2}{b_2}$ が条件

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{b_1} \text{ と } \dfrac{a_2}{b_2} \text{ は分母が正の既約分数} \\ \dfrac{a_1}{b_1} < \dfrac{a_2}{b_2}, \qquad a_2 b_1 - a_1 b_2 = 1 \end{array}\right\} \qquad (\diamondsuit)$$

を満たすとき，以下が成り立つ．

- $\dfrac{a_1}{b_1} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{a_2}{b_2}$ を満たす分母が正の分数 $\dfrac{p}{q}$ の中で，$\dfrac{p}{q} = \dfrac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ は分母が最小（よって既約）．
- $\dfrac{a_1}{b_1}$ と $\dfrac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ の対，$\dfrac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ と $\dfrac{a_2}{b_2}$ の対は，ともに条件$(\diamondsuit)$を満たす．

解法2（分数の性質を利用）

上の性質を利用して$(\spadesuit)$を満たす既約分数 $\dfrac{m}{m+n}$ を探す．

$\dfrac{0}{1} < 0.5665 < 0.5675 < \dfrac{1}{1}$ からスタート $\left(\dfrac{0}{1}\text{ と }\dfrac{1}{1}\text{ の対は}(\diamondsuit)\text{を満たす}\right)$.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \dfrac{0+1}{1+1} = \dfrac{1}{2} = 0.5 & \Longrightarrow \dfrac{1}{2} < 0.5665 < 0.5675 < \dfrac{1}{1} \\
(2) & \dfrac{1+1}{2+1} = \dfrac{2}{3} = 0.666\cdots & \Longrightarrow \dfrac{1}{2} < 0.5665 < 0.5675 < \dfrac{2}{3} \\
(3) & \dfrac{1+2}{2+3} = \dfrac{3}{5} = 0.6 & \Longrightarrow \dfrac{1}{2} < 0.5665 < 0.5675 < \dfrac{3}{5} \\
(4) & \dfrac{1+3}{2+5} = \dfrac{4}{7} = 0.571\cdots & \Longrightarrow \dfrac{1}{2} < 0.5665 < 0.5675 < \dfrac{4}{7} \\
(5) & \dfrac{1+4}{2+7} = \dfrac{5}{9} = 0.555\cdots & \Longrightarrow \dfrac{5}{9} < 0.5665 < 0.5675 < \dfrac{4}{7} \\
(6) & \dfrac{5+4}{9+7} = \dfrac{9}{16} = 0.5625 & \Longrightarrow \dfrac{9}{16} < 0.5665 < 0.5675 < \dfrac{4}{7} \\
(7) & \dfrac{9+4}{16+7} = \dfrac{13}{23} = 0.5652\cdots & \Longrightarrow \dfrac{13}{23} < 0.5665 < 0.5675 < \dfrac{4}{7} \\
(8) & \dfrac{13+4}{23+7} = \dfrac{17}{30} = 0.5666\cdots & \Longrightarrow 0.5665 < \dfrac{17}{30} < 0.5675
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ 試合数が最小の答は17勝13敗.

計算の手間

分数を一つ作り，答か否か確認するのに必要な計算の回数を数える．

- 分数を作る計算に加算2回.
- 答か否かの確認に除算1回と高々2回の大小比較.

$\Longrightarrow$ K番目の分数が答なら加算，除算，大小比較の合計は高々$5K$回.

表2: 勝率の小数の桁数を増やしたときの状況

勝率	作った分数の個数	試合数最小の答
0.56	5	5勝 4敗
0.567	8	17勝 13敗
0.5678	12	67勝 51敗
0.56789	20	435勝331敗
0.567890	24	619勝471敗

応用：MPEG-4 ALS（ロスレス・オーディオ符号化）

「分数のある性質」の発展版（連分数，ファレイ数列の性質）を利用し，情報を落とさずにオーディオ信号を圧縮.

【参考】MP3は人間の聴覚心理（周波数ごとの最小可聴値など）を利用し，情報を落とすことによりオーディオ信号を圧縮.