研究紹介：非線形な数理モデルと応用力学系解析

東京理科大学 理学部第一部 応用数学科 犬伏研究室

inubushi@rs.tus.ac.jp https://www.rs.tus.ac.jp/~inubushi

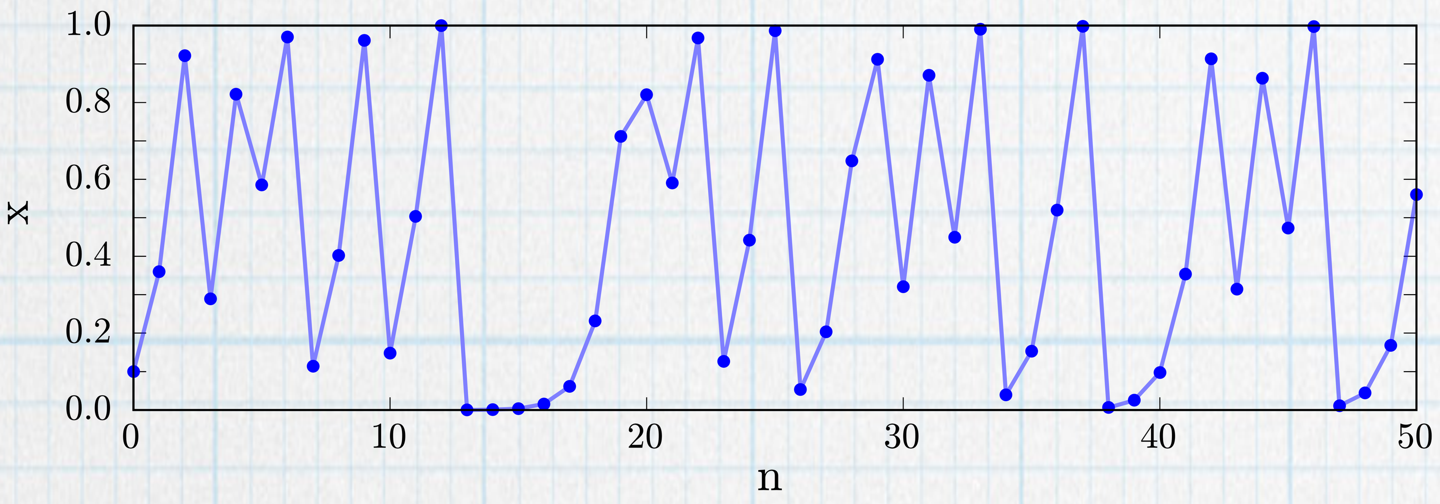
2次関数+漸化式=？

2次関数$f(x) = 4x(1-x)$と漸化式$x_{n+1} = f(x_n)$はどちらも高校の数学で習いますが，それらを組み合わせた漸化式

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4x_n(1-x_n) \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

はあまり見たことがないかもしれません．これは生物の個体数の数理モデルで，x_nは時刻nにおける生物の個体数（割合）を表します．2次関数$f(x)$にはx^2の項があるので，そのグラフは直線ではないです．このようなモデルを非線形な数理モデルといいます（正確な定義やこのモデルの詳細については[1]を参照してください）．

さて時刻$n=0$において$x_0 = 0.1$とすると，次の時刻では$x_1 = 0.4(1-0.1) = 0.36$となります．このように次々と計算していくことで$\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$と値が決まってきます．これを見やすくするために横軸に時刻n，縦軸にx_nをプロットしていくと次の図が描けます．

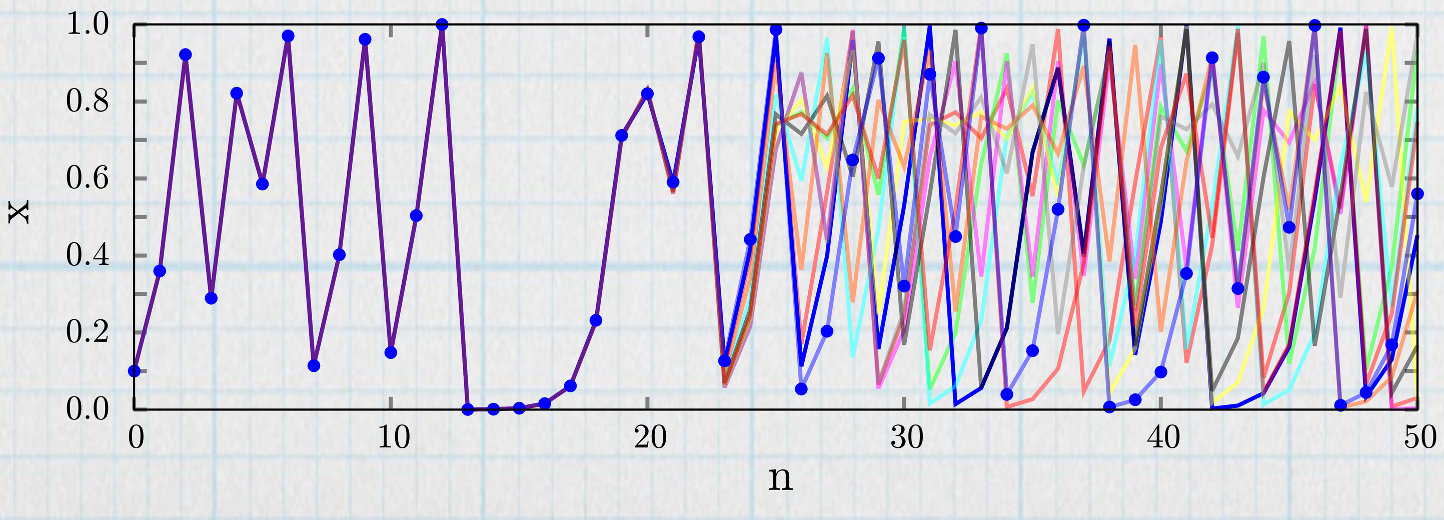


よく知っている2次関数と漸化式を組み合わせただけですが，その結果は予想外なものではないでしょうか？特に，この数理モデルにはサイコロを振るようなランダム性はないはずですが，その動きは一見ランダムで予測が難しそうです．これはカオスと呼ばれる現象で，非線形な数理モデルにはよく見られます．

予測の難しさ

カオスの重要な性質の一つに初期値鋭敏性と呼ばれる性質があります．この性質を見てみるために，先ほどの初期値$x_0 = 0.1$に対してほんの少しだけ誤差を考えてみます．例えば，$x_0 = 0.10000002$や$x_0 = 0.10000007$など普通は無視してしまうような小さな誤差（ズレ）が混入したとします．それぞれの初期値に対して，同じように上記の数理モデルによる時間発展を計算した結果が次の図です．

青色の点は先ほどの$x_0 = 0.1$から計算した結果と同じものです．カラフルな線は$x_0 = 0.10000002$のような（10^{-8}程度の）小さな誤差を加えた初期値から計算した結果です（10個の異なる初期値に対するプロット）．最初のあたりの時刻ではほとんど結果に差は見られませんが，時刻$n = 23$のあたりでは大きく結果は変わってしまいます．



数理モデルのシミュレーションをして現象を予測をすることは重要ですが，上記の結果によると，カオスの長期予測は難しそうです．シミュレーションには初期値を決める必要がありますが，ほんの少しでも誤差が混入するとシミュレーションの結果はすぐにその影響を受けてしまうからです．実際，これは気象予報が難しい原因の一つとされています（例：台風の予想進路）．関連したことが2021年のノーベル物理学賞のScientific Backgroundとしてまとめられています（[2]のFIG. 2参照）．

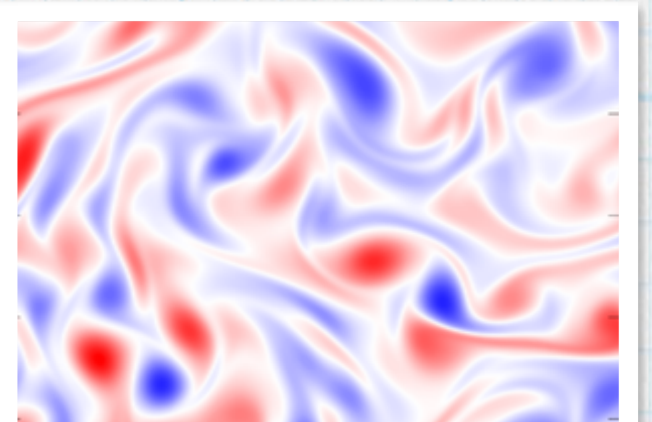
実は，カオスでは初期の誤差は指数関数的に増大することが知られています．つまり，初期の誤差をδ_0，時刻nでの誤差の大きさをδ_nとかくと，$\delta_n \propto \delta_0 e^{\lambda n} \quad (\lambda > 0)$となります．ここで$\lambda$はリヤプノフ指数と呼ばれるカオスの予測の難しさを測る量です．先ほどの数理モデルでは，理論的に$\lambda = \ln 2$となることが計算できます．実際「誤差の大きさが$\delta_n = 0.1$程度になるときに予測が破綻する」と考えると，予測が破綻する時刻n^*は$0.1 = \delta_0 e^{\lambda n^*} \quad (\delta_0 = 10^{-8})$から$n^* \simeq 23$と計算でき，先ほどの結果を説明できます．

カオスはシミュレーションをする上ではやっかいですが，役に立つこともあります．例えば，乱数は私たちの生活（特に情報通信技術）において重要ですが，カオスは乱数生成に使う上で良い性質を持っています[3]．例えば先の2次関数の数理モデルのような単純なものでも，任意の乱数列を生成できます[1]．

流体方程式は非線形

空気や水の運動を記述する流体方程式（ナビエ-ストークス方程式）$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \frac{1}{R}\Delta u$ は最も重要な非線形方程式の一つです．非線形項$u \cdot \nabla u$によってカオスが現れるため解析や予測が難しくなりますが，乱流と呼ばれる普遍的で興味深い現象が起こります[4]．

次の図はナビエ-ストークス方程式をスーパーコンピュータで計算した結果です．コルモゴロフ流れの渦度という量を表示しています．研究室ではナビエ-ストークス方程式系のリヤプノフ指数などに着目した基礎研究を行っています[5]．



またカオスや乱流の問題に関連して，情報科学に関する研究もおこなっています．特にリザバーコンピューティングと呼ばれる機械学習法の数理的研究[6]や流体力学への応用研究を行っています[7]．

参考文献

[1] 山口昌哉，カオスとフラクタル（ちくま学芸文庫）．
[2] https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/summary/
[3] Inubushi, Chaos 29 (2019).
[4] Doering and Gibbon, Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations (Cambridge Texts in Applied Mathematics).
[5] Inubushi, Takehiro, and Yamada, Phys. Rev. E 92 (2015).
[6] Inubushi and Yoshimura, Sci. Rep. 7 (2017).
[7] Inubushi and Goto, Phys. Rev. E 102 (2020).