数式処理とパラメトリック・システムの自動分類

応用数学科　鍋島研究室(1号館15階)
nabeshima@rs.tus.ac.jp

数式処理

数式処理は，記号計算(あるいは代数計算)とも呼ばれ，コンピュータ上で数式(記号)を用いて計算する手法である．数式処理と対比されるのが，数値計算であり双方ともに数学的問題を解くことができるが数値計算の多くは，ある程度の誤差の範囲内で近似解を求めるのに対し，記号計算ではより厳密な解を求める．数式処理を用いることによって，数理モデルや解の導出過程を短縮化し，高速化することができる．

例 $2x^2+7x+2=0$ の解を求めよ．

数値計算 (Numeric computation)	記号計算 (Symbolic computation)
$x=-0.31385933836549$,	$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{33}}{4}$
$x=-3.186140661634507$	誤差無しの計算
誤差ありの計算(近似値)	

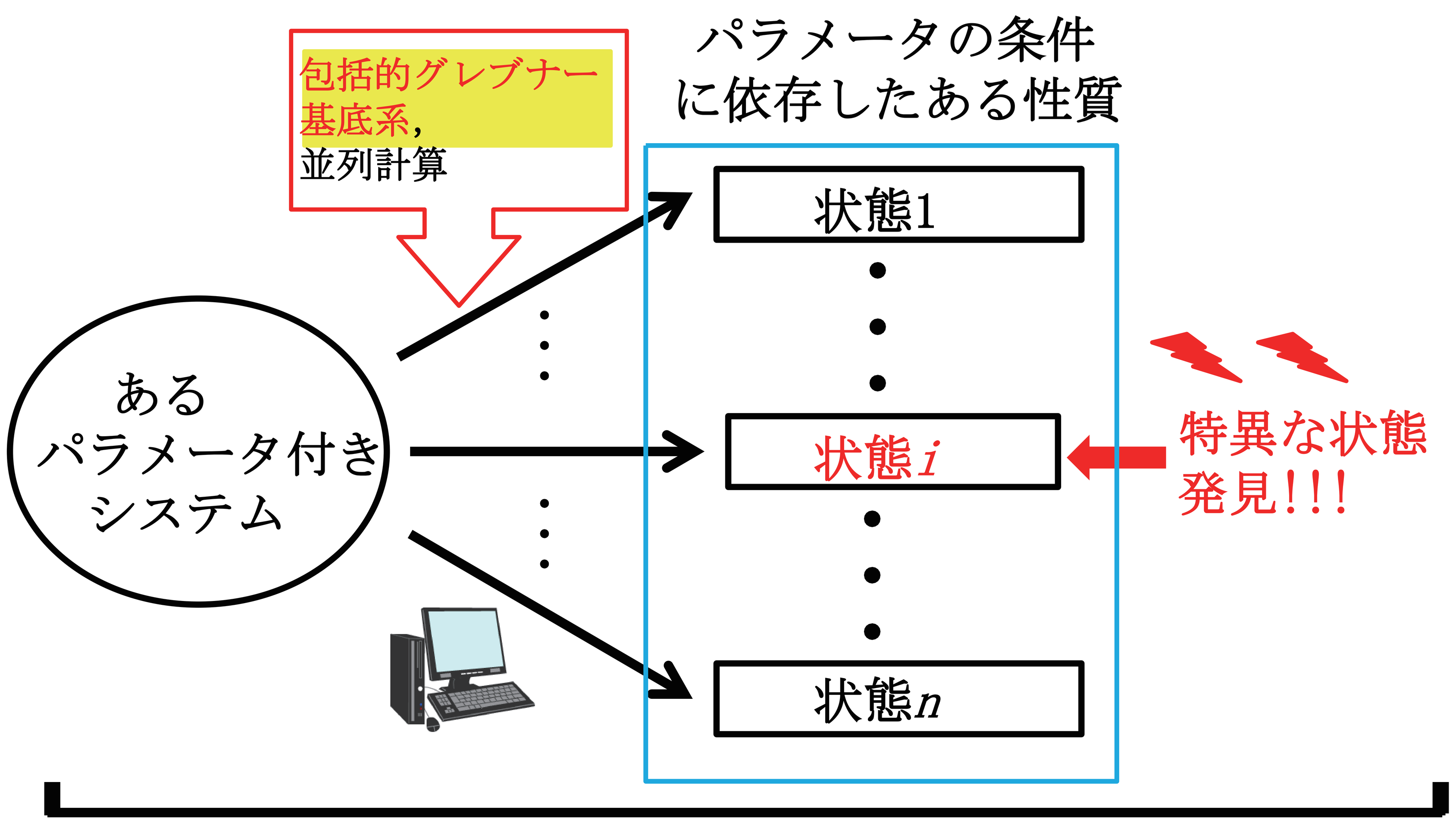
$a+2a=3a$や，因数分解$3x^4+3x^3+7x^2+4x+4=(3x^2+4)(x^2+x+1)$なども記号計算である．

鍋島研究室では，方程式系から目的の情報を取り出すための代数算法またはアルゴリズムの研究を記号計算を用いて行っている．

$$\boxed{\text{方程式系}} \overset{\text{数式処理}}{\Longrightarrow} \boxed{\text{目的の情報}}$$

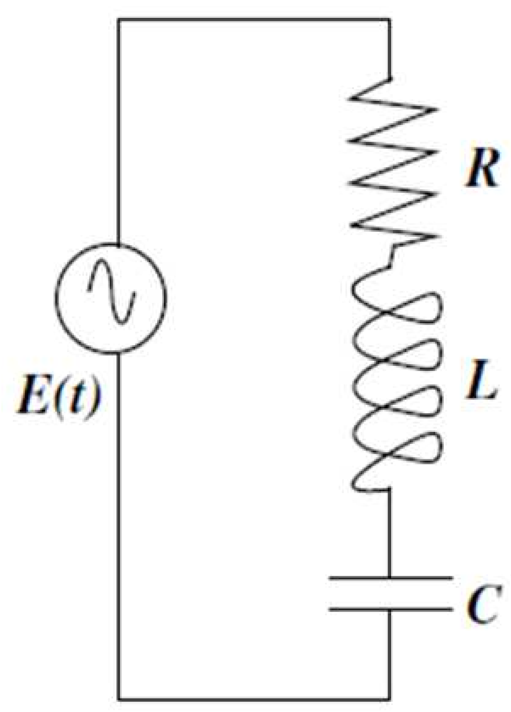
パラメトリック・システムの処理

パラメータを含む代数方程式系は，パラメータの値によって性質が異なるときがある．どのようなパラメータの値によって，方程式系の性質がどのように変化するかを知ることは重要である．パラメータ付き代数方程式系の場合，グレブナー基底という魔法のような道具に着目し，パラメータ空間の分割を行うことで，包括的グレブナー基底系(パラメータ付きグレブナー基底)という神秘的な道具を得ることができる．この魔法のような神秘的な道具を用いることにより，パラメトリック・システム(パラメータ付き方程式系)を自動的に分類することができ，なおかつ用意に，特異で魅力的な数学的性質が得られる．



数多くの包括的グレブナー基底系の応用の中から，以下の2つ紹介する．

電気回路の分類



R: 抵抗,
L:コイル,
C:コンデンサ,
$E(t)$: 交流電圧

左図の電気回路のダイナミクスは次の式で表すことができる．

$$RI(t)+L\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int I(t)dt=e\sin(\omega t) \quad (1)$$

ここで，電流$I(t)$を$x\sin(\omega t)+y\cos(\omega t)$として，式(1)に代入して，$\sin(\omega t)$の係数と$\cos(\omega t)$の係数をセットとしたものが次の$F'$である．

$$F'=\{-x+RC\omega y+L\omega^2Cx,-L\omega^2, Cy+RC\omega x+y-eC\omega\}$$

$I(t)$の振幅をa_mとして，$x^2+y^2-a_m^2$も加えると$F=F'\cup\{x^2+y^2-a_m^2\}$となる．ここで，$a_m$は$I(t)$の振幅である．

e,C,R,L,ωをパラメータ，x,y,a_mを変数としたときのFから生成されるイデアルの包括的グレブナー基底系が次の表である．

	Segment	Gröbner basis
1)	$-1+L\omega^2C=0, e=0, R\neq 0$	$\{x^2+y^2-a_m^2, a_m^2R, xR, yR\}$
2)	$e=0, R=0, (-1+L\omega^2C)\neq 0$	$\{x^2+y^2-a_m^2, -x+L\omega^2Cx, L\omega^2Cy-y, a_m^2CL\omega^2-a_m^2\}$
3)	$R=0, (e(-1+L\omega^2C))\neq 0$	$\{a_m^2CL\omega^2+yeC\omega-a_m^2, L\omega^2Cy+eC\omega-y, x^2+y^2-a_m^2, xe, -x+L\omega^2Cx, y^2e-a_m^2e\}$
4)	$-1+L\omega^2C=0, (Re)\neq 0$	$\{x^2+y^2-a_m^2, xR-e, yR, a_m^2R-xe, ye\}$
5)	$C=0$	$\{a_m^2, x, y\}$
6)	$-1+L\omega^2C=0, e=0, R=0$	$\{x^2+y^2-a_m^2\}$
7)	$\omega=0$	$\{a_m^2, x, y\}$
8)	$(RC\omega(-1+L\omega^2C))\neq 0$	$\{-x+RC\omega y+L\omega^2Cx, a_m^2CL\omega^2+yeC\omega-a_m^2, x^2+y^2-a_m^2, a_m^2R-xe, L\omega^2Cy-RC\omega x+eC\omega-y\}$

パラメータと電圧により8つに分類される。工学的に意味のあるのは4）と8）である．また，$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$は共振条件である．

包括的グレブナー基底系を用いれば自動的にこの情報は得られる．

配置問題

平面図形を考える．中心$A(a,0)$，半径r_1の円と，中心$B(b,0)$，半径r_2の円が交わる点を$P(x,y)$とする．このとき，$AP\perp BP$となるのはどのようなときか考える．2つの円から次の2つの方程式が得られる．

$$\begin{cases} f_1=x^2-2ax+a^2+y^2-r_1^2=0 \\ f_2=x^2-2bx+b^2+y^2-r_2^2=0 \end{cases}$$

また，仮定$AP\perp BP$から次の方程式が得られる．

$$f_3=x^2-ax-bx+ab+y^2=0.$$

ここで，x,yは変数，a,b,r_1,r_2をパラメータとしf_1,f_2,f_3から生成されるイデアルというものの包括的グレブナー基底系$\mathcal{G}$を計算すると

$$\mathcal{G}=\{(\mathbb{V}(a-b,-r_1^2-r_2^2),\{x^2-2bx+y^2+b^2\}),(\mathbb{V}(a^2-2ab+b^2-r_1^2-r_2^2)\backslash\mathbb{V}((r_1^2+r_2^2)a+(-r_1^2-r_2^2)b)),\{(a-b)x-ab+b^2-r_2^2,(-r_1^2-r_2^2)y^2+r_2^2r_1^2\}),(\mathbb{C}^4\backslash\mathbb{V}(a^2-2ab+b^2-r_1^2-r_2^2),\{1\})\}.$$

となる．この情報と数学的考察を加えることにより，次の条件を得る．

解　中心$A(a,0)$，半径r_1の円と，中心$B(b,0)$，半径r_2の円の接点を$P(x,y)$とする．このとき，$AP\perp BP$となる必要十分条件は

$$a^2-2ab+b^2-r_1^2-r_2^2=0$$

である．