連続最適化のアルゴリズムとその応用

東京理科大学 理学部第一部 応用数学科 中山研究室

研究：数理最適化，OR

最適化問題

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\ (\text{または}\ \max_{x\in\mathbb{R}^n})\quad f(x)\quad \text{s.t.}\quad x\in S$$

与えられた制約条件Sの下で，ある関数$f(x)$を最小(または最大)にする解$x=(x_1,...,x_n)^\top$を求める問題．

オペレーションズ・リサーチ（OR）

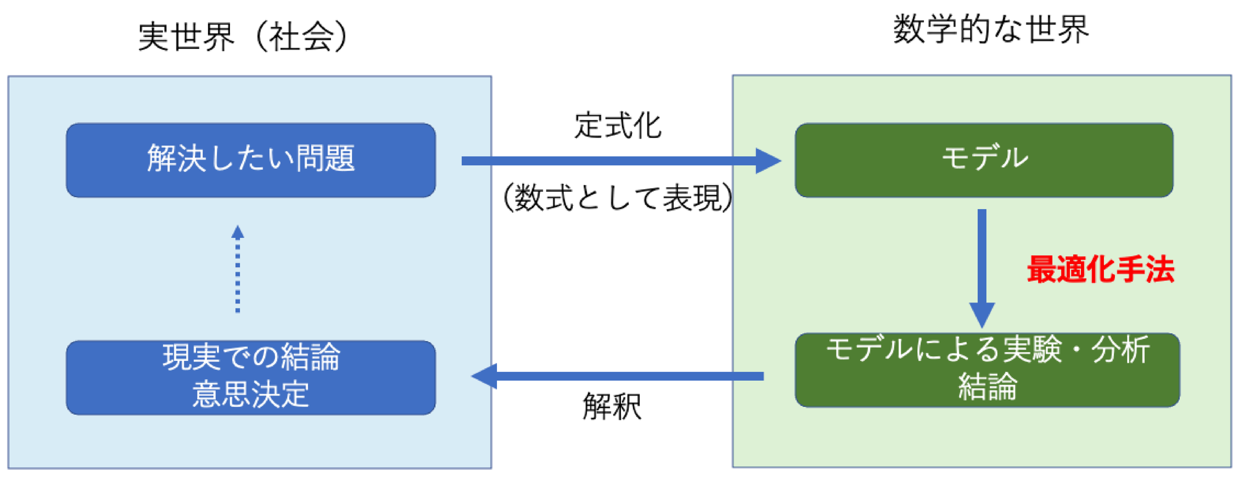


Figure: OR活用の流れ

研究トピック（興味の対象）

- （連続な）最適化問題を解くためのアルゴリズム
- ロバスト最適化などのモデリング技法
- 数理最適化の応用
  - 汎用的なモデリングとアルゴリズム ⇌ 応用への当てはめ ＋ 調節

連続最適化のアルゴリズム〜反復法〜

反復法

$$x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k$$

解を逐次更新して最適解を求める手法

- x_k: k回目の近似解
- $\alpha_k>0$: ステップ幅
- $d_k\in\mathbb{R}^n$: 探索方向

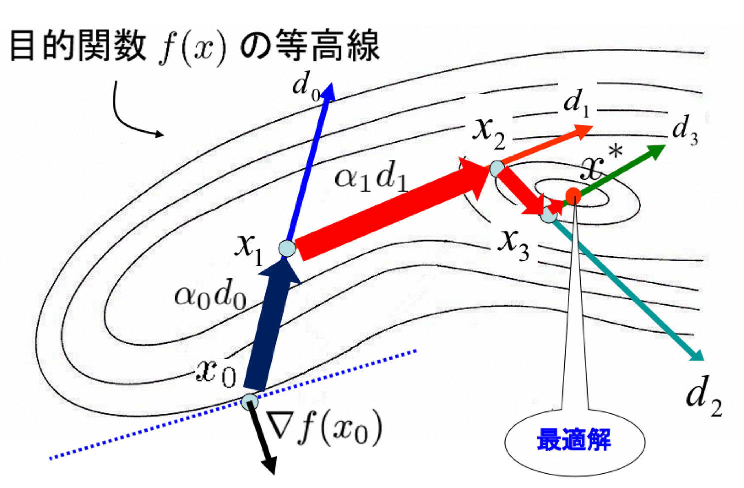


Figure: 目的関数$f(x)$の等高線

探索方向

- １次法 （最急降下法など）
  - 勾配（１回微分の情報）を使った方法．
  - 計算コスト 軽 / 反復回数 多
- ２次法 （ニュートン法，準ニュートン法など）
  - ヘッセ行列（２回微分の情報）まで使った方法．
  - 計算コスト 重 / 反復回数 少

♠ 大規模な問題に対する２次法の研究

箱型制約のアルゴリズムの開発とその応用 [1]

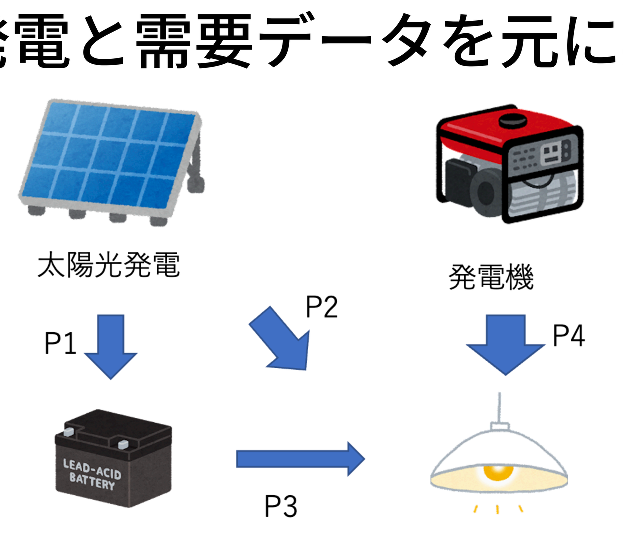
箱型制約付き最適化問題

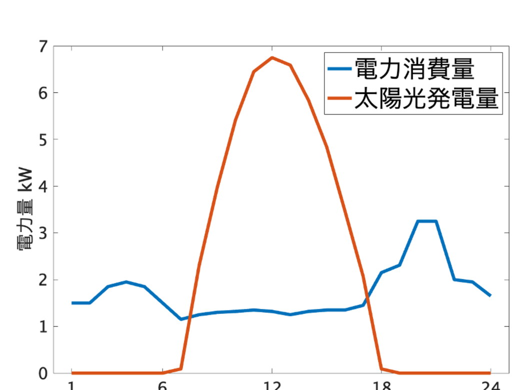
$$\min_{x\in K} f(x),\quad K=\{x\in\mathbb{R}^n \mid l_i\le (x)_i\le u_i,\quad i=1,\ldots,n\},$$

変数がブロック構造を持つ問題に対するアルゴリズムを開発

潮流制御への応用

再エネ発電と需要データを元に期tの電力量$P_i(t)$を計画





$$\min_{P_i(t)}\sum_{t=\tau}^{T+\tau}\Big(\text{太陽光発電のロス}+\text{蓄電池の負荷}+\text{発電コスト}\Big).$$

※t毎に変数$P_i(t)$のブロック構造

[1] Shummin Nakayama, "Active set block Barzilai-Borwein method for model predictive control", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, to appear.

スパース最適化のアルゴリズム

最適化問題

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\quad f(x):=g(x)+h(x)$$

$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$: L-平滑 （微分可能），$h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$: 非平滑（微分可能とは限らない）

hの近接写像が計算可能であれば，近接勾配法を適用可能

近接勾配法（最急降下法（１次法）＋近接写像）

$$x_{k+1}=\mathrm{Prox}_{\frac{1}{L}h}\left(x_k-\frac{1}{L}\nabla g(x_k)\right)$$

- ２次の情報を取り入れた近接勾配法の開発 [2,3]
  - ２次法＋重み付き近接写像 / 重み付き近接写像の計算困難性

[2] Shummin Nakayama, Yasushi Narushima and Hiroshi Yabe, "Inexact proximal DC Newton-type method for nonconvex composite functions", *Computational Optimization and Applications*, **87** (2024), 611–640.

[3] Shummin Nakayama, Yasushi Narushima and Hiroshi Yabe, "Inexact proximal memoryless quasi-Newton methods based on the Broyden family for minimizing composite functions." *Computational Optimization and Applications* **79** (2021), 127–154.

スパースロバスト回帰と応用

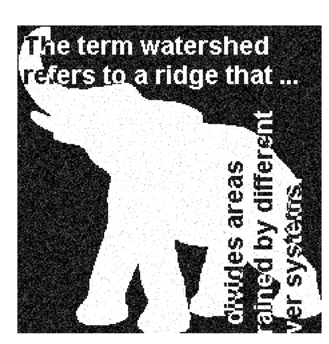
刈込みℓ_1ノルム$T_K(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|_1-\|\boldsymbol{x}\|_K$を用いたスパースロバスト回帰 [4]

$$\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^m}{\text{minimize}}\quad F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}):=\frac{1}{2}\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}-\underbrace{\boldsymbol{z}}_{\text{外れ値}}\|^2+\lambda_1 T_{K_1}(\boldsymbol{x})+\lambda_2 T_{K_2}(\boldsymbol{z})$$

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_m\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\z_2\\ \vdots\\0\end{pmatrix}}_{\text{非ゼロ}K_2\text{個以下}}\approx\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&a_{m3}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\x_2\\0\\ \vdots\\x_{n-1}\\0\end{pmatrix}}_{\text{非ゼロ}K_1\text{個以下}}$$

２つの画像をレジストレーション（位置合わせ）する

画像A



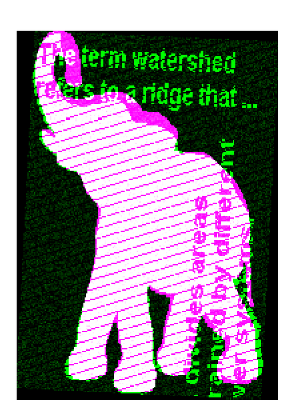
画像B

Bを回転＋伸縮 ⟹

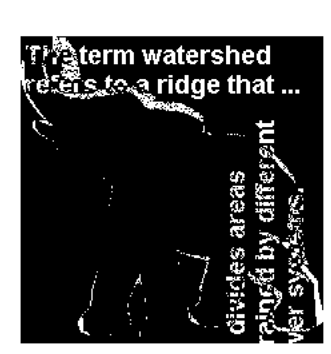
最小二乗法による回転縮小のパラメータ推定の結果

外れ値（対応しない箇所）の影響でレジストレーションに失敗

⇓ スパースロバスト回帰を応用 [5]



ロバスト最小二乗法



推定した外れ値

外れ値に影響せずに
　レジストレーションに成功
　＆ 外れ値を検出

[4] Shummin Nakayama and Jun-ya Gotoh, "On the superiority of PGMs to PDCAs in nonsmooth nonconvex sparse regression", *Optimization Letters*, **15** (2021), 2831–2860.

[5] 中山舜民, 後藤順哉, "Trimmed l_1 正則化を用いたイメージレジストレーション", 京都大学数理解析研究所 共同研究（公開型） 数理最適化の理論と応用の深化, 京都大学, 2022 年 8 月 29 日.

電力の価格決定モデル（ロバスト最適化） [6]

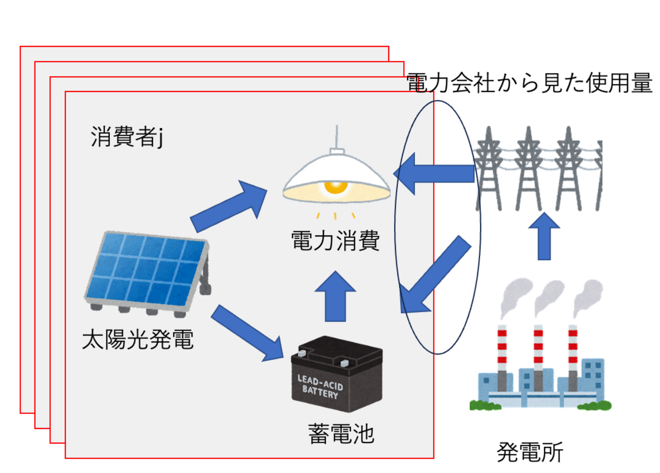


Figure: グリッド

- 電力の需要量と太陽光の発電が不確実なものとした価格決定モデル (Bertsimas and Sim (2004)のロバスト最適化)

消費者の効用

$\max$ 需要の効用 − 価格×使用量

・価格によって消費量は変動

電力会社の利益

$\max$ 価格×使用量 − 生産コスト

全体の最適化問題

$\max$ 需要の効用 − 生産コスト

価格が打ち消されてる

解いた結果の双対変数が価格

[6] 坂本翼, 中山舜民, "太陽光発電を含むエネルギーシステムの不確実な状況下での電力価格決定モデル", 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2024 年春季研究発表会, 筑波大学, 2024 年 3 月 8 日.